Date

1996年 東大数学 文系第2問 理系第2問 ①

$f(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$ とおき、
$f(x)=0$ の判別式をDとする。

$-1<x<1$ で $f(x)=0$ が異なる2実数解を持つ条件は、

(A) $D>0$

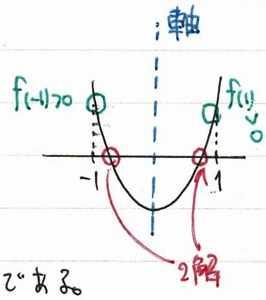
(B) $f(x)$の軸 $x=\frac{a+d}{2}$ について

$-1 < \frac{a+d}{2} < 1$

(C) $f(-1)>0$

(D) $f(1)>0$

の4条件が同時に成立することである。



(A)について

$D=(a+d)^2-4(ad-bc)>0$ を示したい。

正数 a,b,c,d の4つの文字について、
(左辺) > (右辺) を示す。
予選決勝法として、ある1文字以外をすべて固定する。
(今回は a 以外を固定)

$D = a^2 - 2da + d^2 + 4bc$
$= (a-d)^2 + 4bc > 0$ よって成立
($\because$ $(a-d)^2 \geqq 0$ かつ $b>0$ かつ $c>0$)

(A)が示せた。

(B)について

$-1 < \frac{a+d}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < a+d < 2$

$a>0$ かつ $d>0$ より $0<a+d$ なので、
$-2<a+d$ である。

左側はカンタン♪

あとは $a+d<2$ を示したい。
不等式の証明は (大)−(小) なので、
$2-a-d>0$ を示す。
準備として、a と d の不等式を作っておく。

$s(1-a)-tb>0$ …①
$-sc+t(1-d)>0$ …② とおくと、

① $\Leftrightarrow$ $-a > -1+\frac{t}{s}b$
② $\Leftrightarrow$ $-d > -1+\frac{s}{t}c$ なので、

$2-a-d$
$> 2+\left(-1+\frac{t}{s}b\right)+\left(-1+\frac{s}{t}c\right)$
$= \frac{t}{s}b+\frac{s}{t}c > 0$ よって $2>a+d$

右側も示せた。

以上より、$-2<a+d<2 \Leftrightarrow -1<\frac{a+d}{2}<1$

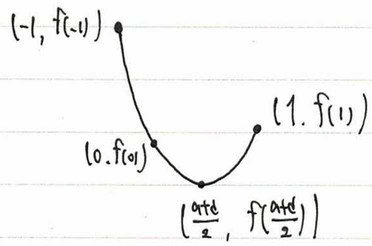
(B)が示せた。

$\boxed{\text{(B)の別解}}$

① $\Leftrightarrow$ $1-a > \frac{t}{s}b > 0$
② $\Leftrightarrow$ $1-d > \frac{s}{t}c > 0$ なので 辺々足すと、
$2-a-d > 0$
$\therefore$ $2>a+d$

(C)について

(B)の前半より、軸の位置について、$x=\frac{a+d}{2}>0$ なので、
放物線の対称性から、
左図のようになるため、
必ず、$f(1)<f(-1)$ である。



よって、(D) $f(1)>0$ を示せば、
(C) $f(-1)>0$ も示せたことになる。

(D)について

$f(1) = 1-(a+d)+(ad-bc) > 0$ を示したい。

ここが $(1-a)(1-d)$ と因数分解できると気付けたなら。

① $\Leftrightarrow$ $(1-a) > \frac{t}{s}b$
② $\Leftrightarrow$ $(1-d) > \frac{s}{t}c$ 辺々かけて、

$(1-a)(1-d) > \frac{t}{s}b \times \frac{s}{t}c$
$= bc$ なので、

$f(1) = (1-a)(1-d) - bc$
$> bc - bc = 0$ $\therefore$ $f(1)>0$

文字を減らす or 予選決勝法 どちらを発想しても OK.

(D)が示せた。

以上より、(A)〜(D)を全て満たすので、題意は示された。

1996年　東大数学　文系第2問．　理系第2問　②

(2)の別解1

$f(1) = 1-(a+d)+(ad-bc) > 0$ を示したい。

因数分解に気付かない場合．

① $\Leftrightarrow$ $b < \frac{s}{t}(1-a)$

② $\Leftrightarrow$ $c < \frac{t}{s}(1-d)$　辺々の積をとり，

$$bc < \frac{s}{t}(1-a) \times \frac{t}{s}(1-d)$$

$$= (1-a)(1-d) \quad (\because\ b>0,\ c>0)$$

よって $-bc > -(1-a)(1-d)$ なので，

$$f(1) = 1-(a+d)+ad-bc$$

$$> 1-(a+d)+ad-(1-a)(1-d)$$

$$= 1-(a+d)+ad-(1-a-d+ad)$$

$$= 0 \qquad \therefore\ f(1) > 0$$